CONCOURS POUR LE RECRUTEMENT
D'INGENIEURS DES ETUDES ET TECHNIQUES D'ARMEMENT
DE BREST

1976

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures.

1ère épreuve

Le second problème est indépendant du premier, sauf en ce qui concerne la question qui termine le 1.)

1er Problème

1.) Calculer les quatre premières dérivées de

$$y = Arc\ tg\ x$$

2.) On pose pour $n \geq 1$

$$y^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1 + x^2)^n}$$

Etudier le degré et la parité du polynôme P_n et calculer le coefficient de son terme de degré maximum.

3.) Démontrer les relations :

(1) $P_{n+1} + 2\,n\,x\,P_n - (1 + x^2)\,P'_n = 0$

(2) $P_{n+1} + 2\,n\,x\,P_n + n\,(n - 1)\,(1 + x^2)\,P_{n-1} = 0$

(3) $P'_n = -\,n\,(n - 1)\,P_{n-1}$

(4) $(1 + x^2)\,P''_n - 2\,(n - 1)\,x\,P'_n + n\,(n - 1)\,P_n = 0$

P'_n et P''_n sont les polynômes dérivées première et seconde de P_n.

4.) On se propose d'établir pour $n \geq 2$ les deux propriétés :

a) les racines de P_n sont réelles et distinctes.

b) $\{x_1, x_2 \ldots x_{n-1}\}$ et $\{x'_1, x'_2 \ldots x'_n\}$ .../...

étant les ensembles ordonnés par valeurs croissantes des racines de P_n et de P_{n+1} , on a :

$$x'_1 < x_1 < x'_2 \ \ldots \ < x'_i < x_i < x'_{i+1} < x_{i+1} \ \ldots < x_{n-1} < x'_n$$

Vérifier ces affirmations sur P_2 , P_3 , P_4

Démontrer les résultats :

Soit K une application dérivable de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$;

on suppose que $\exists a \in \mathbb{R}$, $\exists b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{cases} K(a) = K(b) = 0 \\ \forall x \in]a \quad b[\text{ le signe de K est constant.} \end{cases}$$

Montrer que $K'(a)$ et $K'(b)$ sont, l'un positif ou nul, l'autre négatif ou nul.

En particulier, si K est un polynôme de degré $m \geqslant 2$ admettant m racines réelles et distinctes, les valeurs prises par K' pour deux racines consécutives de K sont, l'une strictement positive, l'autre strictement négative.

Déduire de ce qui précède et de 3.) que P_{n+1} s'annule une fois et une seule sur $]x_i \quad x_{i+1}[\quad i = 1,2 \ \ldots \ n-2$

En appelant x'_{i+1} la racine de P_{n+1} qui appartient à $]x_i \quad x_{i+1}[$ montrer que :

$$P_{n+1}(x) = - n(n+1) \int_{x'_{i+1}}^{x} P_n(t) \, dt$$

et en déduire l'existence d'une racine de P_{n+1} supérieure à x_{n-1} et d'une racine inférieure à x_1 . Conclure.

2ème Problème

1./ On considère l'équation différentielle du second ordre :

(5) $(1 + x^2).y'' - 2\,(n - 1)\,x.y' + n\,(n - 1)y = 0$

Soit f une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ dérivable jusqu'à l'ordre $n+1$

.../...

On note F l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

$$x \in \mathbb{R} \xrightarrow{F} F(x) = (1+x^2)f''(x) - 2(n-1)\, x\, f'(x) + n\,(n-1)\, f(x)$$

Calculer $F^{(n-1)}(x)$.

Montrer que l'intégrale générale de (5) est un sous-espace de l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n

Ecrire cette intégrale générale :

$$a_o + a_1 x + .. + a_k x^k + .. + a_n x^n$$

et calculer les coefficients a_k en fonction de a_o et a_1

Connaît-on un vecteur de base de ce sous-espace ?

2./ Expliciter les coefficients de P_n en utilisant la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ de

$$y'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

3./ On note ϕ l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$

$$x \in \mathbb{R} \xrightarrow{\phi} \phi(x) = (x + i)^n \in \mathbb{C}$$

Montrer que $\phi(x)$ est une solution de (5)

En déduire une base de l'espace vectoriel des solutions de (5)

4./ Calculer les racines de P_n

Calcul numérique

Encadrer la plus grande racine de P_7 entre les quotients par dix de deux entiers consécutifs.

Donner une valeur approchée de cette racine en utilisant la méthode - dite de Descartes - des parties proportionnelles.

Nota - Le calcul numérique n'exige que la connaissance de P_7 qui peut être déterminé directement.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail